

תרגיל 8

1. נתון גרף מלא, כיוונו את כל הקשתות שלו. הוכיחו כי ניתן לבחור קודקוד v כך שמכל קודקוד אחר יש מסלול מכוון ל- v באורך 2 לכל היותר.
2. הוכיחו כי בכל מצולע קמור ניתן למצוא 3 קודקודים רצופים A, B, C כך שהמעגל החוסם של ABC מכיל את המצולע.
3. בעיר רחוקה שלושה בתי ספר ובכל אחד מהם לומדים n תלמידים. כל תלמיד מכיר $1 + n$ תלמידים משני בתי הספר שבהם הוא לא לומד. הוכיחו כי ניתן לבחור תלמיד אחד מכל אחד מבתי הספר כך ששלושתם יכירו זה את זה.
4. באוניברסיטה יש 999 פרופסורים, לכל שניים מביניהם יש נושא משותף יחיד ששניהם מתעניינים בו ובכל נושא מתעניינים בדיוק שלושה פרופסורים. הוכיחו כי ניתן לבחור 250 נושאים כך שכל אחד מבין הפרופסורים יתעניין בנושא אחד לכל היותר.
5. כמה צריחים צריך להציב על המשבצות של קובייה עם צלע באורך n כך שכל משבצת תאווים על ידי צריח אחד לפחות (צריח מאיים גם על המשבצת שעליה עומד)?
6. מעגל בגרף נקרא חסר מיתרים אם כל שני קודקודים לא צמודים במעגל לא מחוברים. ידוע שבגרף מתקיים התנאי: לכל מעגל חסר מיתרים וקודקוד v בגרף, v מחובר לכלל היותר קודקוד אחד מהמעגל. הוכיחו כי הגרף 3-צביע.