



אולימפיאדת המתמטיקאי הצעיר – כיתות ח'-ט' שלב הגמר, שנת תשפ"ג

1. סמנו במישור 8 נקודות כך שלכל נקודה יהיו 4 נקודות שנמצאות במרחקים 2,3,4,5 מהנקודה.

2. בכיכר מעגלית ממוקמים דוכנים של 100 סוחרים שלכל אחד מהם כמות מסוימת של מטבעות. כל סוחר מוכר דגים במחיר קבוע משלו. לכל סוחר יש אספקה בלתי מוגבלת של דגים. ביום הראשון אחד מהסוחרים הרכיב חכת זהב. בכל יום שלאחר מכן הסוחר שמחזיק בחכת הזהב הולך לדוכן של הסוחר הבא במעגל, מוסר לו את החכה ואז קונה ממנו כמה שיותר דגים לפי הכסף שיש לו.

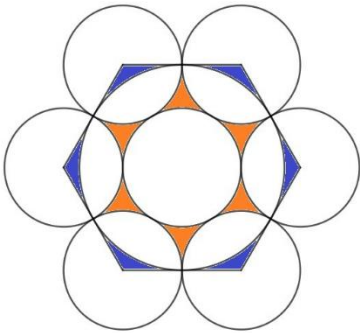
אם הסוחר לא מצליח לקנות דגים בכלל ביום כלשהו, יום זה יקרא יום עצוב.

הוכיחו שאם היום ה-2022 הוא יום עצוב אז גם היום ה-2023 יהיה יום עצוב.

3. מהו המספר הראשוני המינימלי $p > 10$ עבורו המספר

$$|105 - 2p|$$

פריק?



4. בציור רואים 7 מעגלים בגודל זהה, חלקם משיקים זה לזה, ומשושה שנוצר כאשר מחברים מרכזים של שישה מהם, ומעגל גדול שחסום במשושה זה. הוכיחו שהשטח הכחול שווה לשטח הכתום.

5. במתנ"ס מועברים N חוגים. בכל חוג משתתפים מספר תלמידים, ידוע שאין שני תלמידים המשתתפים בדיוק באותם החוגים ושכל תלמיד משתתף בחוג אחד לפחות. שני תלמידים יקראו חברים אם הם הולכים לחוג משותף. ידוע שאם תלמיד א' חבר של תלמיד ב' ותלמיד ב' חבר של תלמיד ג' אז תלמיד א' חבר של תלמיד ג'.

מהי כמות התלמידים הגדולה ביותר שיכולה ללמוד במתנ"ס? התשובה עשויה להיות תלויה ב- N .

6. מצאו את כל הפתרונות במספרים חיוביים עבור המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x^2 + xy = z \\ y^2 + yz = x \\ z^2 + zx = y \end{cases}$$

7. במשולש שווה צלעות ABC הנקודה D נמצאת על הקטע AB כך ש- $AD = \sqrt{3}BD$ והנקודה E נמצאת על הקטע AC כך ש- $\sqrt{3}CE = 2AE$. הישר DE חותך את המשך הצלע BC בנקודה F .

חשבו את גודל הזווית $\angle DFB$ במעלות.

בהצלחה!